第 4 节 高考中双曲线常用的二级结论（★★☆）

内容提要

解析几何中存在无数的二级结论，本节筛选出了一些在高考中比较常用的双曲线二级结论，记住这些结论可适当缩短解题时间.

1．焦点三角形面积公式：如图 1，设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 分别是双曲线的左、右焦点，$\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\Delta PF_1F_2}=c|y_P|=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$.

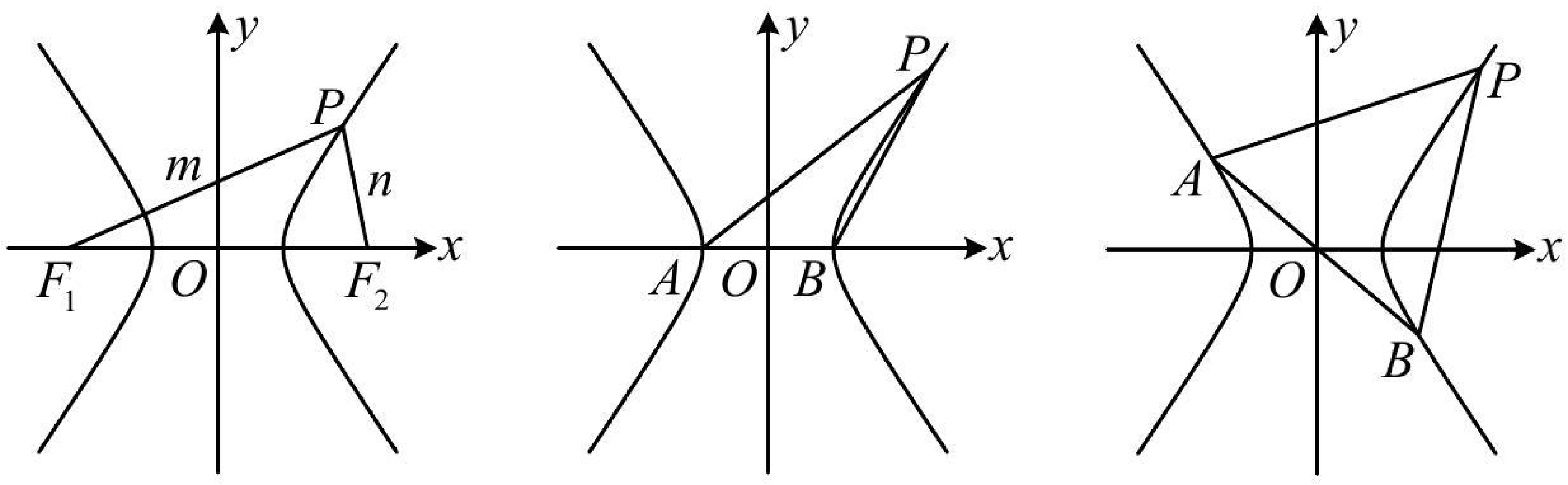


图1　　图2　　图3

证明：一方面，ΔPF_1F_2 的边 F_1F_2 上的高 $h=|y_P|$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot|y_P|=c|y_P|$；

另一方面，记 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $|m-n|=2a$ ①，

在 ΔPF_1F_2 中，由余弦定理，$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，

所以 $4c^2=m^2+n^2-2mn\cos\theta=(m-n)^2+2mn-2mn\cos\theta=(m-n)^2+2mn(1-\cos\theta)$ ②，

将式①代入式②可得：$4c^2=4a^2+2mn(1-\cos\theta)$，所以 $mn=\frac{4c^2-4a^2}{2(1-\cos\theta)}=\frac{2b^2}{1-\cos\theta}$，

故 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}mn\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2}{1-\cos\theta}\cdot\sin\theta=b^2\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=b^2\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$.

2．基于双曲线第三定义的斜率积结论：如上图 2，设 A，B 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点，P 是双曲线上不与 A，B 重合的任意一点，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}$.

注：上述结论中 A，B 是双曲线的左、右顶点，可将其推广为双曲线上关于原点对称的任意两点，如上图 3，只要直线 PA，PB 的斜率都存在，就仍然满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}$，下面给出证明.

证明：设 $A(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，则 $B(-x_1,-y_1)$，所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}$ ①，

因为点 A 在双曲线上，所以 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，故 $y_1^2=b^2(\frac{x_1^2}{a^2}-1)=\frac{b^2}{a^2}(x_1^2-a^2)$，同理，$y_2^2=\frac{b^2}{a^2}(x_2^2-a^2)$，

所以 $y_2^2-y_1^2=\frac{b^2}{a^2}(x_2^2-a^2-x_1^2+a^2)=\frac{b^2}{a^2}(x_2^2-x_1^2)$，代入①得：$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}$；

在上述条件中令 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，即得内容提要第 2 点的特殊情况下的结论.

3．中点弦斜率积结论：如图 4，AB 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条不与坐标轴垂直且不过原点的弦，M 为 AB 中点，则 $k_{AB}\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}$，此结论可用下面的点差法来证明.

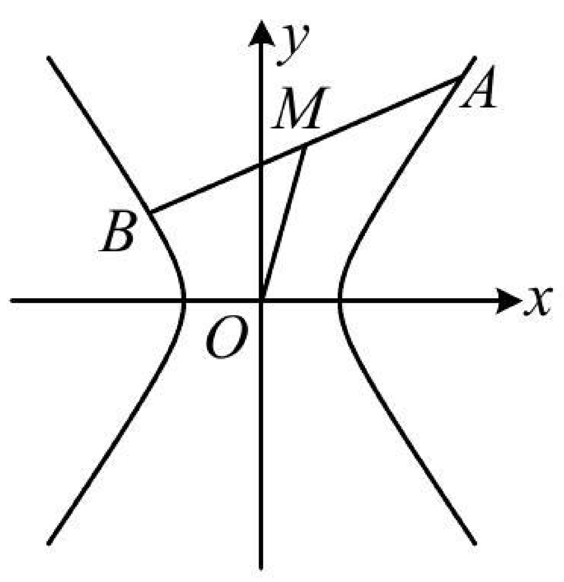


图4

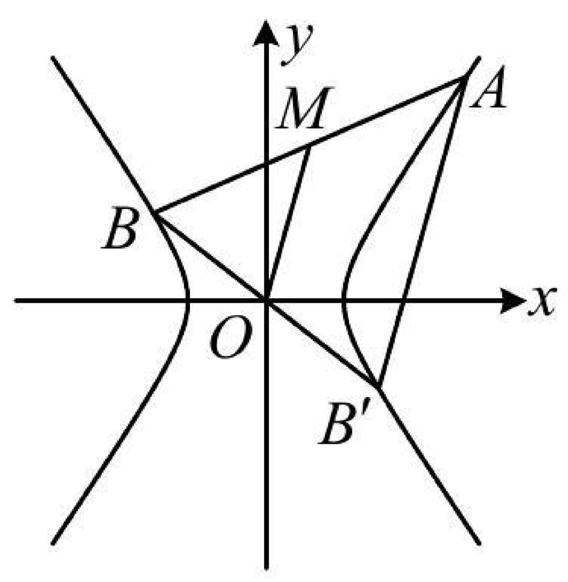


图5

证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$，因为 A，B 都在双曲线上，所以 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，

两式作差得：$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，整理得：$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{b^2}{a^2}$ ①，

注意到 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{AB}$，$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{2y_M}{2x_M}=\frac{y_M}{x_M}=k_{OM}$，所以式①即为 $k_{AB}\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}$.

注：中点弦结论和上面的第三定义斜率积结论的结果都是 $\frac{b^2}{a^2}$，这是巧合吗？不是，两者之间有必然的联系. 如上图 5，设 B' 为 B 关于原点的对称点，则 B' 也在该双曲线上，且 O 为 BB' 中点，结合 M 为 AB 中点可得 $OM\,/\!/\,AB'$，所以 $k_{AB}\cdot k_{OM}=k_{AB}\cdot k_{AB'}$，于是又回到了双曲线上的点 A 与双曲线上关于原点对称的 B 和 B' 的连线的斜率积.

典型例题

类型Ⅰ：焦点三角形面积

【例 1】在平面直角坐标系 xOy 中，F_1，F_2 是双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的两个焦点，点 M 在 C 上，且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，则 ΔF_1F_2M 的面积为（　　）

（A）$\sqrt{3}$　　（B）2　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）4

解析： 求焦点三角形面积可考虑代公式 $S=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$，由 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 恰好可求得公式中的 θ，

因为 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，所以 $\theta=\angle F_1MF_2=90^\circ$，故 $S_{\Delta F_1F_2M}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{2}{\tan 45^\circ}=2$.

答案：B

【变式】已知 F_1，F_2 是双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点，P 为双曲线 C 右支上的一点，$\angle F_1PF_2=120^{\circ}$，则点 P 的纵坐标为_____，$|PF_1|=$_____.

解析：给出 $\angle F_1PF_2$，可由 $S=\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$ 求出 ΔPF_1F_2 的面积，再由 $S=c|y_P|$ 解出 y_P，

由题意，双曲线 C 的半焦距 $c=\sqrt{1+3}=2$，$S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=\dfrac{3}{\tan 60^{\circ}}=\sqrt{3}$，

又 $S_{\Delta PF_1F_2}=c|y_P|=2|y_P|$，所以 $2|y_P|=\sqrt{3}$，解得：$y_P=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

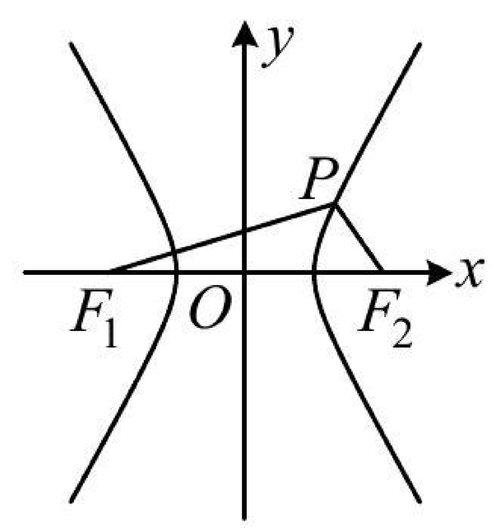
再求 $|PF_1|$，可联想到由双曲线定义和 ΔPF_1F_2 的面积各建立一个关于 $|PF_1|$ 和 $|PF_2|$ 的方程，求解即可，

如图，由双曲线定义，$|PF_1|-|PF_2|=2$ ①，

又 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}|PF_1|\cdot|PF_2|=\sqrt{3}$，所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=4$ ②，

由①可得 $|PF_2|=|PF_1|-2$，代入②整理得：$|PF_1|^2-2|PF_1|-4=0$，解得：$|PF_1|=1+\sqrt{5}$ 或 $1-\sqrt{5}$（舍去）.

答案：$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$1+\sqrt{5}$



【反思】从上面两道题可以看出，当题干给出 $\angle F_1PF_2$ 时，可用 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$（其中 $\theta=\angle F_1PF_2$）来算焦点三角形的面积；由 $S_{\Delta PF_1F_2}=c|y_P|=\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$ 还可以建立顶角 θ 和 $|y_P|$ 之间的等量关系.

类型Ⅱ：第三定义、中点弦斜率积结论

【例 2】双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点分别为 A 和 B，P 为双曲线 C 上不与 A，B 重合的一点，若 PA，PB 的斜率之积为 1，则双曲线 C 的离心率为_____.

解析：涉及双曲线上的点与左、右顶点的连线斜率积，用双曲线第三定义斜率积结论处理，

由双曲线第三定义斜率积结论，$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{b^2}{a^2}=1$，所以 $a^2=b^2=c^2-a^2$，整理得：$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$.

答案： $\sqrt{2}$

【变式 1】在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点分别为 A，B，若该双曲线上存在点 P，使 PA，PB 的斜率之和为 1，则该双曲线的离心率的范围为（　　）

（A）$(\sqrt{3},+\infty)$　　（B）$(1,\sqrt{3})$　　（C）$(\frac{\sqrt{5}}{2},+\infty)$　　（D）$(1,\frac{\sqrt{5}}{2})$

解析： 条件给的是斜率之和，表面上跟斜率之积无关，但我们可利用不等式 $xy\le(\frac{x+y}{2})^2$ 来沟通和与积，

由第三定义斜率积结论，$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}$，又由题意，$k_{PA}+k_{PB}=1$，且 $k_{PA}\ne k_{PB}$，

所以 $\frac{b^2}{a^2}=k_{PA}\cdot k_{PB}<(\frac{k_{PA}+k_{PB}}{2})^2=\frac{1}{4}$，从而 $a^2>4b^2=4c^2-4a^2$，故 $5a^2>4c^2$，

所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}<\frac{5}{4}$，结合 $e>1$ 可得 $1<e<\frac{\sqrt{5}}{2}$.

答案： D

【变式 2】设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 与直线 $y=kx$ 交于 A,B 两点，P 为 C 右支上的一动点，记直线 PA，PB 的斜率分别为 k_{PA}，k_{PB}，C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，若 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{1}{9}$，则下列说法正确的是（　　）

（A）$a=\sqrt{3}$

（B）双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$

（C）若 $PF_1\perp PF_2$，则 ΔPF_1F_2 的面积为 2

（D）双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$

解析： 由对称性可得 A，B 关于原点对称，又涉及斜率之积 $k_{PA}\cdot k_{PB}$，故想到第三定义斜率积结论，

因为 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{9}$，所以 $a=3$，从而双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{3}x$，

离心率 $e=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}=\frac{\sqrt{10}}{3}$，故 A 项和 B 项错误，D 项正确；

对于 C 项，求焦点三角形面积，代公式 $S=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$ 即可，

当 $PF_1\perp PF_2$ 时，$\angle F_1PF_2=90^{\circ}$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\tan 45^{\circ}}=1$，故 C 项错误.

答案： D

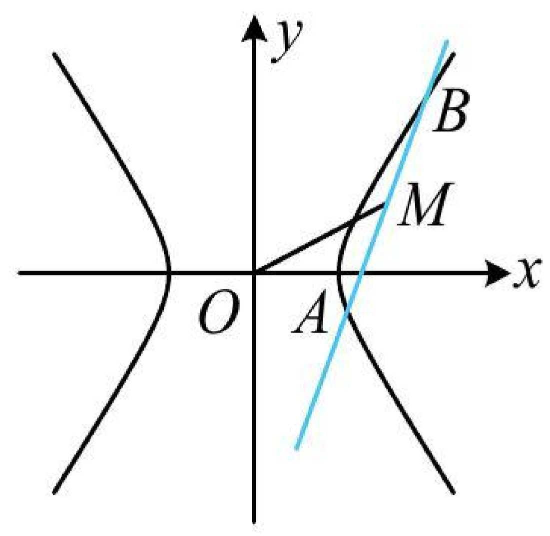
【反思】涉及双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上的点 P 与双曲线上关于原点对称的 A，B 两点连线的斜率之积，考虑用第三定义斜率积结论 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}$，其推导方法请参考本节内容提要.

【例 3】已知 A，B 是双曲线 $C:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$ 上的两点，线段 AB 的中点是 $M(2,1)$，则直线 AB 的方程为_____.

解析：涉及弦中点，想到中点弦斜率积结论，$M(2,1)\Rightarrow k_{AB}\cdot k_{OM}=k_{AB}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以 $k_{AB}=3$，

如图，直线 AB 过点 M，故其方程为 $y-1=3(x-2)$，整理得：$3x-y-5=0$.

答案：$3x-y-5=0$



【变式】已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，过点 $P(0,2)$ 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，且 AB 的中点为 $N(2,3)$，则双曲线 C 的离心率为_____.

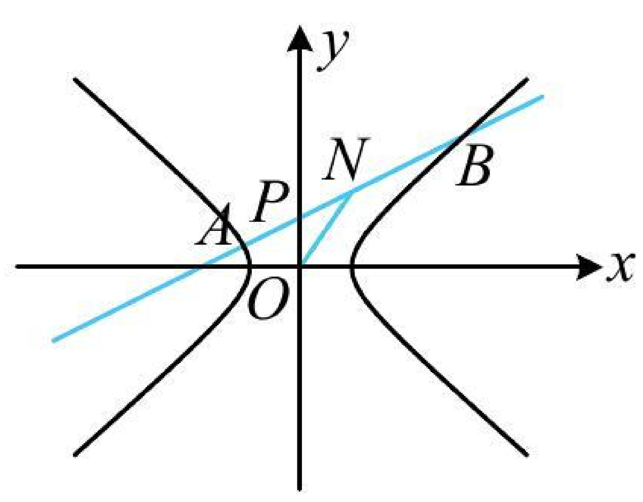
解析：条件中有弦 AB 的中点，故想到中点弦斜率积结论，先画图看看，

如图，由中点弦斜率积结论，$k_{AB}\cdot k_{ON}=\frac{b^2}{a^2}$ ①，

又 $k_{AB}=k_{PN}=\frac{3-2}{2-0}=\frac{1}{2}$，$k_{ON}=\frac{3-0}{2-0}=\frac{3}{2}$，代入①得：$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{b^2}{a^2}$，

所以 $3a^2=4b^2=4c^2-4a^2$，从而 $7a^2=4c^2$，故离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{7}}{2}$



【总结】在双曲线中，涉及弦中点的问题都可以考虑用中点弦斜率积结论来建立方程，求解需要的量.

强化训练

1．（★）设F_1，F_2是双曲线$C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$的左、右焦点，$P$为$C$上一点，若$\angle F_1PF_2=60^{\circ}$，则$\Delta PF_1F_2$的面积为_____.

2．（2023·江西模拟·★★）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，其渐近线方程为$y=\pm 2x$，$P$是$C$上一点，且$PF_1\perp PF_2$，若$\Delta PF_1F_2$的面积为4，则$C$的焦距为（　　）

（A）$\sqrt{3}$　（B）$2\sqrt{3}$　（C）$2\sqrt{5}$　（D）$4\sqrt{5}$

3．（2023·陕西安康模拟·★★★）双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$C$上一点$P$到$x$轴的距离为$2a$，$\angle F_1PF_2=120^{\circ}$，则双曲线$C$的离心率为_____.

4．（2022·陕西汉中模拟·★★）已知双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的左焦点为$F$，过$F$作斜率为2的直线与双曲线交于$A$，$B$两点，$P$是$AB$中点，$O$为原点，若直线$OP$的斜率为$\dfrac{1}{4}$，则双曲线的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　（B）2　（C）$\dfrac{3}{2}$　（D）$\sqrt{2}$

5．（2023·安徽模拟·★★）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$与直线$y=-x+2$相交于$A$，$B$两点，弦$AB$的中点$M$的横坐标为$-1$，则双曲线$C$的渐近线方程为（　　）

（A）$y=\pm\sqrt{3}x$　（B）$y=\pm 3x$　（C）$y=\pm\dfrac{1}{3}x$　（D）$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

6.（2023•安徽亳州模拟•★★）已知平行四边形 $ABCD$ 的四个顶点均在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上，且直线 AB，AD 的斜率之积为 $\frac{1}{9}$，则该双曲线的渐近线方程是_____.

7.（2022•湖南长沙模拟•★★★）已知 $m+n=4$，点 $M(m,n)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$ 的一条弦 AB 的中点，则当 mn 取得最大值时，直线 AB 的方程为_____.

8.（★★★）已知 A，B 为双曲线 E 的左、右顶点，点 M 在 E 上，ΔABM 为等腰三角形，且顶角为 120°，则 E 的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{5}$　（B）2　（C）$\sqrt{3}$　（D）$\sqrt{2}$